

# Etude des transferts bidimensionnels de chaleur et de masse lors du séchage par convection naturelle d'une plaque poreuse verticale chauffée par un flux constant

S. BEN NASRALLAH

Ecole Nationale des Ingénieurs de Sfax, 3038 Sfax, Tunisie

et

G. ARNAUD

Laboratoire d'Etudes des Systèmes Thermiques et Energétiques, 40 Avenue du Recteur Pineau,  
86022 Poitiers Cedex, France

(*Reçu le 26 mars 1988 et sous forme finale le 1 décembre 1988*)

**Résumé**—Cette étude concerne les transferts bidimensionnels de chaleur et de masse lors du séchage par convection naturelle d'une plaque poreuse verticale chauffée à flux constant. Un modèle régissant ce phénomène de séchage est présenté et résolu par une technique de différences finies. Des résultats de la simulation numérique sont présentés et analysés.

## 1. INTRODUCTION

LE SÉCHAGE est une opération rencontrée dans beaucoup de secteurs industriels (industrie agroalimentaire, industrie du bâtiment, traitement du bois, etc.). Une meilleure compréhension de ce phénomène revêt, par conséquent un grand intérêt. A ce titre l'étude de ce type de problème attire l'attention des auteurs et a fait l'objet de plusieurs travaux. Parmi les études concernant la formulation du séchage, nous citons celles de Whitaker [1-3] et de Marle [4]; parmi les travaux relatifs au séchage convectif, ceux de Bories *et al.* [5], de Moyne et Degiovanni [6] qui concerne le séchage à haute température, de Basilico et Martin [7] dans le cas du séchage du bois, de Harmathy [8] de Ben Nasrallah et Arnaud [9], de Perré *et al.* [10], de Prat [11].

La quasi-totalité des études relatives au séchage convectif supposent que les transferts sont unidirectionnels. A notre connaissance, seul le travail récent de Prat [11] traite les transferts bidimensionnels et ceci dans le cas du séchage par convection forcée d'un milieu poreux contenant une faible teneur en liquide.

Notre contribution consiste en l'étude des transferts bidimensionnels de chaleur et de masse lors du séchage par convection naturelle d'une plaque poreuse verticale chauffée à flux constant. Ce type de problème idéalise beaucoup de processus industriels et naturels tels que le séchage par convection naturelle du sol et des murs des bâtiments lorsqu'ils sont chauffés par un flux solaire.

On propose un modèle théorique décrivant ce phénomène de séchage. Ce modèle utilise des conditions simples à l'interface milieu poreux-milieu fluide. Il

ne tient pas compte des effets des hétérogénéités au voisinage de l'interface et des problèmes de variation d'échelle au passage du milieu poreux au milieu fluide. On montre, ensuite, que le problème de convection naturelle externe se ramène à celui de l'évaporation par convection naturelle sur une plaque verticale chauffée à flux variable. Les solutions de ce dernier problème sont déjà connues [12]. Ceci simplifie la résolution du modèle. Un code numérique mis au point permet la résolution du système d'équations régissant le phénomène. Enfin des résultats de la simulation numérique sont présentés et analysés.

## 2. FORMULATION DU PROBLÈME

On considère une plaque poreuse verticale constituée d'une matrice solide inerte et indéformable, d'une phase liquide (eau pure) et d'une phase gazeuse contenant de l'air et de la vapeur d'eau. Cette plaque est imperméable et adiabatique sur trois faces (Fig. 1), la quatrième est perméable chauffée à flux constant

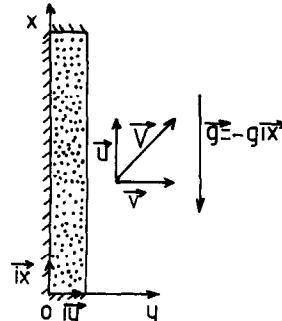


FIG. 1. Configuration géométrique considérée.

## NOMENCLATURE

$a$	diffusivité thermique du mélange gazeux	$Q_r$	flux de chaleur échangé par rayonnement entre l'interface milieu poreux–milieu fluide et l'environnement
$C$	concentration en vapeur	$R$	constante des gaz parfaits
$C_\infty$	concentration ambiante en vapeur	$S$	saturation en liquide
$C_{ps}, C_{pl}, C_{pv}, C_{pa}$	capacité calorifique du solide, du liquide, de la vapeur, et de l'air	$Sc$	nombre de Schmidt
$D$	coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air	$T$	température ambiante
$D_{eff}$	coefficient de diffusion effectif de la vapeur dans le milieu poreux	$u, v$	composante tangentielle et longitudinale de la vitesse barycentrique massique du mélange gazeux
$g$	accélération de la pesanteur	$V_s$	vitesse de séchage.
$h$	coefficent d'échange thermique		
$\Delta h_{vap}$	chaleur latente de vaporisation		
$K$	perméabilité intrinsèque du milieu poreux		
$K_l$	perméabilité relative à la phase liquide		
$m$	masse d'eau évaporée par unité de temps et de volume		
$M_a, M_v$	masse moléculaire de l'air et de la vapeur		
$N$	rapport des poussées d'Archimède massique et thermique à l'interface milieu poreux–milieu fluide		
$P_c$	pression capillaire		
$P_g$	pression totale du mélange gazeux		
$P_v$	pression partielle de la vapeur		
$Pr$	nombre de Prandtl du mélange gazeux		
$Q$	flux de chaleur fourni à la plaque poreuse		

## Symboles grecs

$\alpha$	coefficent de transfert de masse
$\beta, \beta^*$	coefficients de dilatation thermique et massique du mélange gazeux
$\epsilon$	porosité
$\epsilon_l$	fraction du volume élémentaire occupée par le liquide
$\lambda_{eff}$	conductivité thermique effective du milieu poreux
$\mu_l$	viscosité du liquide
$\rho C_p$	capacité calorifique du milieu poreux
$\rho_v, \rho_a, \rho_l, \rho_s$	masses volumiques de la vapeur, de l'air sec, du liquide et du solide.

et en contact avec l'air de température et d'humidité fixées. La largeur de la plaque est suffisamment grande pour que les transferts puissent être considérés bidimensionnels. Le milieu poreux est initialement isotherme et en équilibre hydrostatique.

## 2.1. Modélisation des transferts dans la plaque poreuse

La modélisation théorique des transferts de chaleur et de masse dans les milieux poreux est souvent faite en utilisant un changement d'échelle. On passe de l'échelle microscopique où la taille du volume élémentaire est petite devant celle des pores, à l'échelle macroscopique où la taille du volume élémentaire  $\omega$  est grande par rapport à celle des pores. Les grandeurs macroscopiques sont les moyennes sur le volume élémentaire des grandeurs microscopiques. Soit  $f$  une grandeur microscopique fonction du temps et du point. Sa moyenne s'écrit :

$$\bar{f} = \left( \int_{\omega} f d\omega \right) / \omega.$$

On définit également une moyenne intrinsèque sur la phase  $i$  :

$$\bar{f}_i = \left( \int_{\omega_i} f d\omega \right) / \omega_i$$

$\omega_i$  est le volume occupé dans  $\omega$  par la phase  $i$ .

Le système d'équations régissant, à l'échelle macroscopique, les transferts de chaleur et de masse dans les milieux poreux est établi par Whitaker [1]. Ce système se simplifie dans le cas du problème considéré ici (séchage à la pression atmosphérique et à des température inférieures à 90°C d'un milieu poreux de perméabilité intrinsèque supérieure à  $10^{-15} \text{ m}^2$ ). En effet, on montre [10] que :

(1) L'accumulation de la vapeur, le transport de chaleur par convection et la thermomigration peuvent être négligés.

(2) La vitesse de l'air sec ainsi que l'effet des variations de la pression totale du mélange gazeux peuvent être négligés. Il s'ensuit que pour la phase gazeuse la loi de Darcy généralisée et l'équation de conservation de la masse peuvent être écartées.

Compte tenu de ces hypothèses simplificatrices, le système d'équations macroscopiques résultants s'écrit.

## Equation de conservation de la masse du liquide

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{KK_l}{\mu_l} \frac{\partial P_c}{\partial \epsilon_l} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{KK_l}{\mu_l} \frac{\partial P_c}{\partial \epsilon_l} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial y} \right) \\ = - \frac{m}{\rho_l} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{KK_l}{\mu_l} \rho_l g \right) \quad (1) \end{aligned}$$

$\varepsilon_l$  est la teneur en liquide ( $\varepsilon_l = \omega_l/\omega$ ) ;  $K$  et  $K_l$  sont les perméabilités respectivement intrinsèque et relative,  $P_c$  est la pression capillaire,  $\mu_l$  est la viscosité du liquide et  $m$  est la masse du liquide évaporée par unité de temps et de volume :

$$m = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{\rho}_g^s D_{\text{eff}}}{(1-\bar{\rho}_v/\bar{\rho}_g)} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho}_v/\bar{\rho}_g) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{\rho}_g^s D_{\text{eff}}}{(1-\bar{\rho}_v/\bar{\rho}_g)} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho}_v/\bar{\rho}_g) \right) \quad (2)$$

$D_{\text{eff}}$  est le coefficient de diffusion effectif de la vapeur dans le milieu poreux,  $\rho_v$  et  $\rho_g$  sont les masses volumiques moyennes de la vapeur et de l'air :

$$\bar{\rho}_v = \frac{\bar{P}_v M_v}{R\bar{T}}; \quad \bar{\rho}_g = \bar{\rho}_v + (\bar{P}_g - \bar{P}_v) M_a / R\bar{T} \quad (3)$$

$\bar{P}_g$  est la pression totale moyenne du mélange gazeux et  $\bar{P}_v$  est la pression partielle moyenne de la vapeur.

#### Equation de conservation de l'énergie

$$\rho C_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{\text{eff}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{\text{eff}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) - \Delta h_{\text{vap}} m. \quad (4)$$

$\bar{T}$  est la température moyenne et  $\lambda_{\text{eff}}$  est la conductivité thermique effective. La capacité calorifique du milieu poreux  $\rho C_p$  et la chaleur latente de vaporisation  $\Delta h_{\text{vap}}$  s'écrivent :

$$\rho C_p = \bar{\rho}_s C_{ps} + \bar{\rho}_l C_{pl} + \bar{\rho}_v C_{pv} + \bar{\rho}_a C_{pa} \quad (5)$$

$$\Delta h_{\text{vap}} = \Delta h_{\text{vap}}^0 + (C_{pv} - C_{pl}) \bar{T}. \quad (6)$$

Les expressions des différents paramètres de transport ( $K, K_l, \lambda_{\text{eff}}, D_{\text{eff}}$ ) ainsi que celles de la pression capillaire et de la pression partielle de la vapeur sont reportées en annexe.

#### 2.2. Modélisation des transferts par convection naturelle externe

Dans l'air environnant et au voisinage de la face perméable, les poussées d'Archimède dues aux gradients thermiques et massiques engendrent un écoulement de convection naturelle.

On suppose que les effets croisés de Duffour et de Soret sont négligeables et que l'écoulement est bidimensionnel laminaire et en régime quasi-stationnaire. En supposant, encore, valables les approximations de couche limite et du fluide de Boussinesq, le système d'équations régissant les transferts par convection naturelle externe s'écrit :

#### Equation de conservation de la masse du mélange gazeux

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$u$  et  $v$  sont les composantes respectivement suivant  $x$  et  $y$  de la vitesse barycentrique massique du mélange gazeux.

#### Equation de quantité de mouvement

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) + g\beta^*(C - C_\infty) \quad (8)$$

$v$  est la viscosité cinématique de l'air,  $\beta$  et  $\beta^*$  sont les coefficients de dilatation thermique et massique,  $T$  et  $C$  sont la température et la concentration de la vapeur ( $C = \rho_v/\rho_g$ ),  $T_\infty$  et  $C_\infty$  sont les valeurs de  $T$  et de  $C$  loin de la plaque.

#### Equation de conservation de l'énergie

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (9)$$

#### Equation de conservation de la masse de la vapeur

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (10)$$

$a$  et  $D$  sont respectivement la diffusivité thermique et le coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air.

#### 2.3. Conditions aux limites

(1) Les flux de chaleur et de masse normaux aux faces imperméables et adiabatiques de la plaque portante sont nuls :

à  $y = 0$  :

$$\rho_1 \frac{KK_l}{\mu_l} \frac{\partial P_c}{\partial \varepsilon_l} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial y} - \frac{\bar{\rho}_g^s D_{\text{eff}}}{(1-\bar{\rho}_v/\bar{\rho}_g)} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho}_v/\bar{\rho}_g) = 0; \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

à  $x = 0$  et  $L$  :

$$\rho_1 \frac{KK_l}{\mu_l} \frac{\partial P_c}{\partial \varepsilon_l} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial x} - \frac{\bar{\rho}_g^s D_{\text{eff}}}{(1-\bar{\rho}_v/\bar{\rho}_g)} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho}_v/\bar{\rho}_g) = 0; \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

(2) On suppose que le diamètre moyen des pores est faible par rapport à l'épaisseur de la couche limite afin de négliger les effets de la rugosité et du retrait des ménisque.

A l'interface milieu poreux–milieu fluide ( $y = l$ ), on suppose que :

$$T = \bar{T} \quad (13)$$

$$\rho_v = \bar{\rho}_v^s = \bar{P}_{\text{veq}}^s M_v / R\bar{T} \quad (14)$$

$P_{\text{veq}}$  est la pression d'équilibre de la vapeur

$$\rho_g = \bar{\rho}_g^s \quad (15)$$

l'écriture de la continuité du flux d'humidité, à  $y = l$ , conduit à

$$\begin{aligned} \frac{KK_l}{\mu_l} \left( \frac{\partial P_c}{\partial \varepsilon_l} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho_l} \left[ \frac{D_{\text{eff}} \bar{\rho}_g^s}{(1-\bar{\rho}_v/\bar{\rho}_g)} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho}_v/\bar{\rho}_g) \right] \\ = \frac{1}{\rho_l} \left[ \rho_v v - \rho_g D \frac{\partial C}{\partial y} \right]. \end{aligned}$$

En négligeant à l'interface, comme à l'intérieur du milieu poreux, la vitesse de l'air sec, cette équation

devient :

$$\begin{aligned} \frac{KK_l}{\mu_l} \left( \frac{\partial P_c}{\partial \epsilon_l} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho_l} \left[ \frac{D_{\text{eff}} \bar{\rho}_g^g}{(1 - \bar{\rho}_v / \bar{\rho}_g)} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho}_v / \bar{\rho}_g) \right] \\ = \frac{-\rho_g}{1 - C} \frac{\partial C}{\partial y}. \quad (16) \end{aligned}$$

Compte tenu de la condition (13), le bilan d'énergie à l'interface chauffée par un flux  $Q$  s'écrit à  $y = l$ :

$$\lambda_{\text{eff}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \Delta h_{\text{vap}} \frac{\rho_l K K_l}{\mu_l} \frac{\partial P_c}{\partial \epsilon_l} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial y} = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + Q - Q_{ra} \quad (17)$$

$Q_{ra}$  étant le flux de chaleur échangé par rayonnement entre l'environnement et l'interface milieu poreux-milieu fluide et  $\lambda$  est la conductivité thermique de l'air extérieur.

Compte tenu de (16) cette équation devient :

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \Delta h_{\text{vap}} \rho_g D \frac{\partial C}{\partial y} = Q - \lambda_{\text{eff}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \\ - \Delta h_{\text{vap}} \left[ \frac{C \rho_l K K_l}{\mu_l} \frac{\partial P_c}{\partial \epsilon_l} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial y} + \bar{\rho}_g^g D_{\text{eff}} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho}_v / \bar{\rho}_g) \right] \\ - Q_{ra} = q(x). \quad (18) \end{aligned}$$

La perméabilité du milieu poreux considérée étant très faible, la vitesse barycentrique du mélange gazeux à l'interface est très petite. On suppose, alors, pour le problème de convection naturelle externe, que la vitesse est nulle à l'interface :

$$u(x, 1) = v(x, 1) = 0. \quad (19)$$

Loin de la plaque, l'air est supposé non stratifié et au repos :

$$y \rightarrow \infty : T \rightarrow T_\infty; C \rightarrow C_\infty; u \rightarrow 0. \quad (20)$$

#### 2.4. Conditions initiales

Le milieu poreux est supposé initialement isotherme et en équilibre hydrostatique :

$$\bar{T} = T_0 = \text{cste} \quad (21)$$

$$\frac{\partial P_c}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial x} = \rho_l g. \quad (22)$$

Cette équation est associée à une condition particulière sur  $\epsilon_l$ .

#### 2.5. Remarques sur les solutions du problème de convection naturelle externe

Les transferts par convection naturelle externe sont régis par le système d'équations (7) à (10) associées aux conditions aux limites (14) et (18) à (20). Ce système a été résolu dans le cadre de l'étude de l'évaporation par convection naturelle sur une plaque verticale chauffée à flux variable [12]. Les coefficients d'échanges thermique  $h$  et massique  $\alpha$  sont déduits, à chaque instant, de l'étude citée et s'expriment de la façon suivante :

$$h = \frac{\lambda}{x} \frac{1 + N(x)}{1 + N(x) \sqrt{\left(\frac{Sc}{Pr}\right)}} \frac{(P(N)Gr_x)^{1/5}}{Sm(x, 1)} \quad (23)$$

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{Sc}{Pr}\right)} \frac{D}{\lambda} h \quad (24)$$

avec :

$$\begin{aligned} P(N) = & \left( 1 + N(x) \sqrt{\left(\frac{Sc}{Pr}\right)} \right) / \\ & \left( 1 + \frac{\Delta h_{\text{vap}} D \rho_g \beta}{\lambda \nu^2} N(x) \sqrt{\left(\frac{Sc}{Pr}\right)} \right) \quad (25) \end{aligned}$$

$$Gr_x = \frac{(q(x)^{1/3} x)^5 g \beta}{\lambda \nu^2} / \left( \int_0^x q(x)^{2/3} dx \right) \quad (26)$$

$$N(x) = \beta^* (C(x, 1) - C_\infty) / \beta(T(x, 1) - T_\infty). \quad (27)$$

Pour un écoulement ascendant de convection naturelle externe,  $Sm(x, 1)$  peut être approchée de la façon suivante [12] :

$$Sm(x, 1) = 2.095 - 0.863 \pi(x) \quad (28)$$

$$\pi(x) = (q(x)^{2/3})' \left( \int_0^x q(x)^{2/3} dx \right) / q(x)^{4/3}. \quad (29)$$

Le paramètre  $N(x)$  est la rapport à l'interface milieu poreux-milieu fluide, des poussées d'Archimède massique et thermique.  $N(x)$  permet d'estimer l'importance relative des contributions des deux poussées d'Archimède massique et thermique dans la génération de l'écoulement de convection naturelle externe. Plus la valeur de  $N(x)$  est grande plus la contribution des gradients de concentration est importante. En particulier, le cas limite  $N = 0$  correspond à un écoulement engendré par des gradients thermiques et  $N = \infty$  à un écoulement dû aux gradients de concentration.

En introduisant les coefficients d'échange thermique  $h$  et massique  $\alpha$ , les conditions à l'interface milieu poreux-milieu fluide (16) et (17) deviennent :

$$\begin{aligned} \rho_l \frac{KK_l}{\mu_l} \left( \frac{\partial P_c}{\partial \epsilon_l} \right) \left( \frac{\partial \epsilon_l}{\partial y} \right) - \frac{D_{\text{eff}} \bar{\rho}_g^g}{(1 - \bar{\rho}_v / \bar{\rho}_g)} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho}_v / \bar{\rho}_g) \\ = \frac{\alpha(C - C_\infty)}{(1 - C)} = V_s \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{eff}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \Delta h_{\text{vap}} \frac{\rho_l K K_l}{\mu_l} \left( \frac{\partial P_c}{\partial \epsilon_l} \right) \left( \frac{\partial \epsilon_l}{\partial y} \right) \\ = -h(\bar{T} - T_\infty) + Q - Q_{ra} \quad (31) \end{aligned}$$

$V_s$  étant la vitesse de séchage.

Dans le cadre des hypothèses citées, le système d'équations résultant et régissant les transferts de chaleur et de masse lors du séchage par convection naturelle d'une plaque poreuse verticale chauffée à flux constant est constitué par les équations (1) à (6), (11), (12) et (21) à (31).

### 3. RESOLUTION NUMERIQUE

La résolution numérique du système d'équations (1) à (6), (11), (12) et (21) à (31) est faite à l'aide d'une méthode de différences finies basée sur l'approche du domaine de contrôle [13] qui a l'avantage d'assurer la conservation des flux et ainsi d'éviter la génération de sources parasites de chaleur et d'énergie.

On définit un réseau de point  $P_{ij}$  autour desquels on construit des domaines de contrôles (Figs. 2 et 3). La valeur d'une grandeur physique  $\Phi$  au point  $P_{ij}$  et à l'instant  $t + \Delta t$  sera notée  $\Phi_{i,j}^{n+1}$ .

Le maillage utilisé varie avec le temps. Au début du séchage et avant l'apparition du front d'évaporation (zone à fort gradient de teneur en liquide), le maillage adopté est uniforme et assez lâche (Fig. 2). Dès que le front commence à pénétrer, on divise le milieu poreux en deux sous-domaines de calcul caractérisés par des pas  $\Delta y$  et  $\Delta y_1$ , (Fig. 3). Dans le sous-domaine qui contient le front d'évaporation le maillage uniforme est plus fin. Compte tenu du fait que le front se déplace dans le milieu poreux, les limites des sous-domaines varient avec le temps. Elles sont déterminées par des tests sur les valeurs des gradients de la teneur en liquide en bas de la plaque. En effet, c'est en cette région que le front pénètre le plus vite et le sous-domaine de calcul à maillage serré couvrira, par conséquent, toutes les parties du milieu poreux où il y a de forts gradients de teneur en liquide. Vers la fin du séchage, les gradients de teneur en liquide demeurent faibles et on revient à un maillage uniforme assez lâche (Fig. 2).

Les équations de conservations sont intégrées sur l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$  et sur le domaine de contrôle. Afin de ramener les équations intégrales résultantes à des équations algébriques liant entre elles les valeurs des solutions aux noeuds du maillage, on fait les hypothèses suivantes :

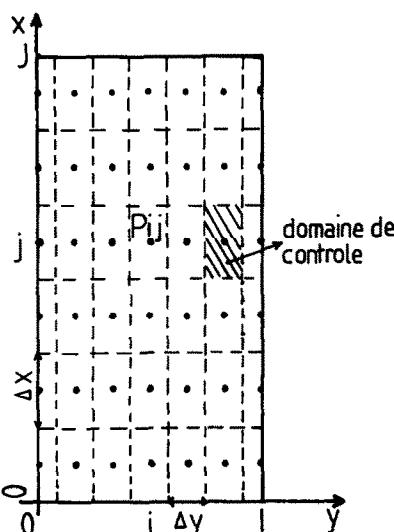


FIG. 2. Maillage uniforme adopté au début du séchage.

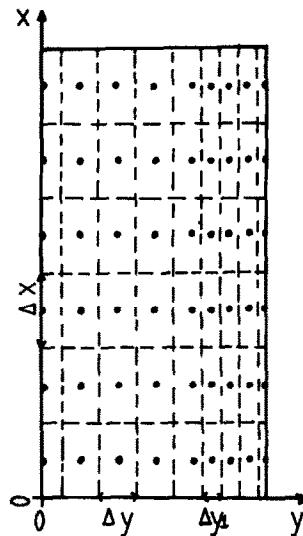


FIG. 3. Maillage variable adopté lorsque le front d'évaporation apparaît.

(a)  $(\partial e_i / \partial t)_{i,j}$ ;  $(\rho C_p (\partial T / \partial t))_{i,j}$ ;  $m_{ij}$  et  $(\Delta h_{\text{vap}} m)_{i,j}$  peuvent être considérées comme étant des moyennes spatiales de  $(\partial e_i / \partial t)$ , de  $(\rho C_p (\partial T / \partial t))$ , de  $m$  et de  $(\Delta h_{\text{vap}} m)$  sur le domaine de contrôle entourant le point  $P_{ij}$ .

(b) Les termes de diffusion et les termes sources peuvent être évalués à l'instant  $t + \Delta t$ . Ceci revient à adopter un schéma implicite qui permet d'assurer la stabilité du modèle numérique.

(c) Les solutions varient linéairement entre deux noeuds voisins. Ainsi les dérivées premières en espace apparaissant dans les expressions des flux aux faces des domaines de contrôle sont évaluées de la façon suivante :

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i,j+1/2}^{n+1} = (\phi_{i,j+1}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n+1}) / \Delta x.$$

(d) Les différents paramètres

$$\left( \lambda_{\text{eff}}, \frac{KK_i}{\mu_i} \frac{\partial P_c}{\partial e_i}, \frac{\bar{\rho}_g^s D_{\text{eff}}}{(1 - \bar{\rho}_v / \bar{\rho}_g)}, \frac{KK_i}{\mu_i} \right)$$

varient linéaire entre deux noeuds voisins. Ceci conduit, par exemple, à approximer la conductivité thermique effective aux faces des domaines de contrôle comme suit :

$$(\lambda_{\text{eff}})_{i \pm 1/2, j}^{n+1} = [(\lambda_{\text{eff}})_{i,j}^{n+1} + (\lambda_{\text{eff}})_{i \pm 1, j}^{n+1}] / 2.$$

Avec ce type de discréttisation, l'erreur de troncature est du premier ordre en temps et du second ordre en espace.

Afin de garder le même ordre de précision en évaluant, à l'interface milieu poreux-milieu fluide, les dérivées premières en espace qui apparaissent dans l'expression de  $q(x)$ , on opte pour un schéma décentré

utilisant trois noeuds du maillage :

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{i,j} = (-3\phi_{i-1}^{n+1} + 4\phi_{i-1,j}^{n+1} - 2\phi_{i-2,j}^{n+1}) / 2\Delta y.$$

Les deux équations de conservation de la masse et de l'énergie se ramènent donc, à un système d'équations algébriques non linéaires de la forme :

$$A\phi_{i,j}^{n+1} = B\phi_{i+1,j}^{n+1} + C\phi_{i-1,j}^{n+1} + D\phi_{i,j+1}^{n+1} + E\phi_{i,j-1}^{n+1} + F.$$

Le schéma numérique est stable selon le critère de Friedrich [13] parce que les coefficients  $A, B, C, D$  et  $E$  sont de même signe.

Le système d'équations algébriques résultant est résolu itérativement par une méthode de balayage ligne par ligne.

Posons :

$$A\phi_{i,j}^{n+1} = B\phi_{i+1,j}^{n+1} + C\phi_{i-1,j}^{n+1} + G$$

$$G = D\phi_{i,j+1}^{n+1} + E\phi_{i,j-1}^{n+1} + F$$

cas du balayage suivant la direction 0y

ou

$$A\phi_{i,j}^{n+1} = D\phi_{i,j+1}^{n+1} + E\phi_{i,j-1}^{n+1} + G$$

$$G = B\phi_{i+1,j}^{n+1} + C\phi_{i-1,j}^{n+1} + F$$

cas du balayage suivant la direction 0x.

Cette méthode consiste à évaluer, à l'aide de solutions estimées, les coefficients  $A, B, C$  et  $G$  ou  $A, D, E, G$  selon la direction du balayage : puis résoudre par la méthode d'élimination de Gauss le système d'équations tridiagonales résultant. Si les solutions trouvées sont assez proches des solutions estimées, on atteint, alors, la convergence. Si non la même procédure est répétée en évaluant cette fois ci les coefficients du système tridiagonal à l'aide des solutions qui viennent d'être trouvées ; et ceci jusqu'à la convergence. Une condition suffisante pour que cette méthode itérative converge est que le système d'équations algébriques soit à dominance diagonale :

$[B+C+D+E]/[A] \leq 1$  pour toutes les équations

$[B+C+D+E]/[A] < 1$  au moins pour une équation ce qui est vérifié ici.

La rapidité de la convergence dépend de la direction du balayage. Les solutions variant beaucoup plus avec  $y$  qu'avec  $x$ , il est préférable d'effectuer le balayage suivant  $y$ .

*Remarque.* Compte tenu du fait que la position du front d'évaporation dépend de la hauteur  $x$ , les gradients de teneurs en liquide suivant  $x$  sont aussi importants. Par conséquent, l'obtention d'une précision suffisante nécessite aussi des pas  $\Delta x$  petits. D'autre part, l'utilisation de pas d'espace petits implique, à cause du déplacement du front, la nécessité de pas de temps petits. Ces contraintes sur les pas font que le temps de calcul est très élevé.

#### 4. RESULTAT DE LA SIMULATION NUMERIQUE DU SECHAGE PAR CONVECTION NATURELLE

Les résultats présentés concernent le séchage par convection naturelle d'une plaque poreuse verticale chauffée à flux constant ( $Q = 100$  W) et placée dans l'air sec ( $C_\infty = 0$ ).

La hauteur de la plaque est de 0,55 m et son épaisseur est de 0,01 m. Initialement, la température dans la plaque est constante ( $T_0 = 276,15$  K) et légèrement supérieure à la température ambiante ( $T_\infty = 2715,15$  K) et ceci afin d'éviter d'avoir un écoulement descendant au début du séchage. La distribution initiale de la teneur en liquide est donnée par l'équation de l'équilibre hydrostatique associée à la condition aux limites suivante :

$$\epsilon_i(0, y) = 0,5\epsilon; \quad \epsilon \text{ est la porosité du milieu poreux.}$$

Au début du séchage, se produit une phase transitoire où la température et la concentration en vapeur croissent. Les deux poussées d'Archimède thermique et massique, qui sont de même sens dans ce cas ( $N > 0$ ), deviennent de plus en plus importantes et l'écoulement de convection naturelle s'accélère. La vitesse de séchage  $V_s$  augmente pendant cette période (Fig. 4). On note, aussi, une décroissance du rapport  $N$  des poussées d'Archimède (Fig. 5). La contribution de la poussée d'Archimède thermique dans la génération de l'écoulement de convection naturelle externe prend, alors, de plus en plus d'importance.

Après cette phase transitoire, on atteint une période de séchage où le milieu poreux se trouve en équilibre thermique avec l'environnement. La température dans le milieu poreux ne varie plus avec le temps. L'écoulement de convection naturelle externe est, alors, permanent. A une hauteur donnée, la vitesse de séchage ainsi que le rapport  $N$  des poussées d'Archimède à l'interface sont constants (Figs. 4 et 5). Pendant cette période de séchage les gradients thermiques suivant l'épaisseur sont très faibles. Les flux dans la direction  $y$ , de chaleur et de vapeur sont donc négligeables.

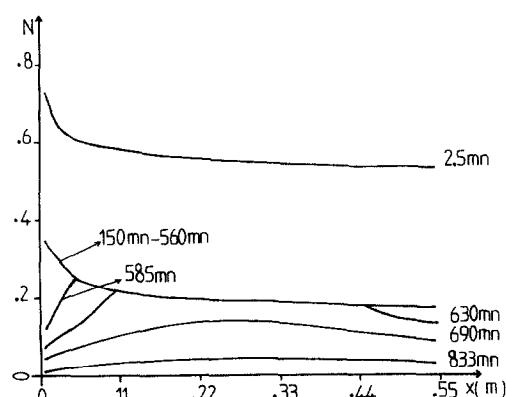


FIG. 4. Profil du rapport  $N$  des poussées d'Archimède à l'interface milieu poreux-milieu fluide.

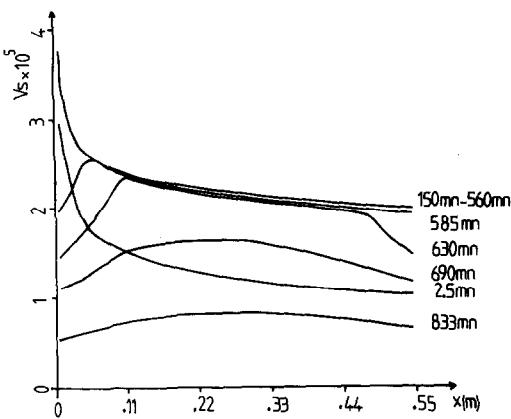


FIG. 5. Profil de la vitesse de séchage.

En négligeant les flux de chaleur

$$\left( \lambda_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

et de vapeur

$$\left( \frac{\bar{\rho}_g D_{\text{eff}}}{(1 - \bar{\rho}_v / \bar{\rho}_g)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{\rho}_v}{\bar{\rho}_g} \right) \right)$$

les conditions à l'interface (30), (31) et (18) conduisent à :

$$\frac{\Delta h_{\text{vap}} \alpha (C(x, 1) - C_{\infty})}{(1 - C(x, 1))} = -h(T(x, 1) - T_{\infty}) + Q - Q_{\text{ra}} \quad (32)$$

$$q(x) = Q - Q_{\text{ra}} - \Delta h_{\text{vap}} \alpha \frac{(C(x, 1) - C_{\infty})}{1 - C(x, 1)}. \quad (33)$$

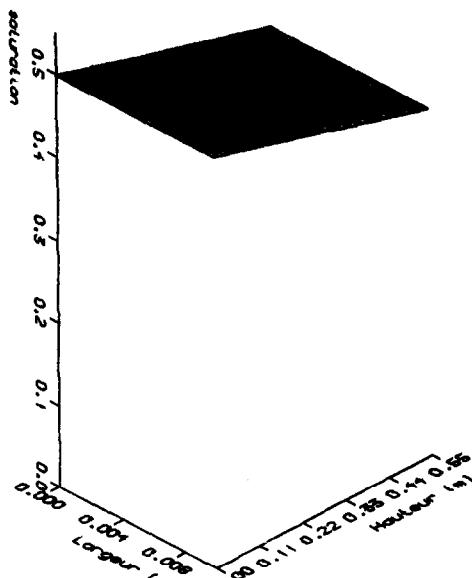


FIG. 6. Profil de saturation à t = 2,5 mn.

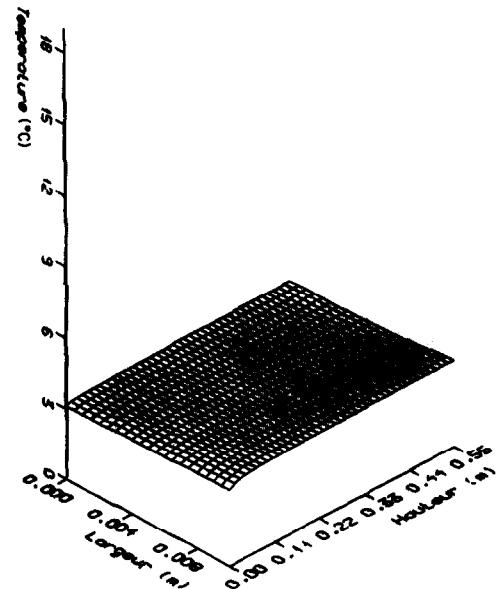


FIG. 7. Profil de température à t = 2,5 mn.

La distribution de la température dans le milieu poreux, les coefficients d'échange  $h$  et  $\alpha$  et par conséquent le rapport  $N$  des poussées d'Archimède à l'interface et la vitesse de séchage peuvent être, alors, déterminés en résolvant le système d'équations (32), (33) et (23) à (29).

Au cours de ces premières étapes du séchage, on a représenté, à différents instant, les profils de température et de saturation  $S(\epsilon_i / \epsilon)$  dans le milieu poreux (Figs. 6-9). Compte tenu de la distribution de la vitesse de séchage (Fig. 4), la partie inférieure de la plaque sèche plus vite. La saturation croît avec la hauteur, atteint un maximum puis décroît sous l'effet

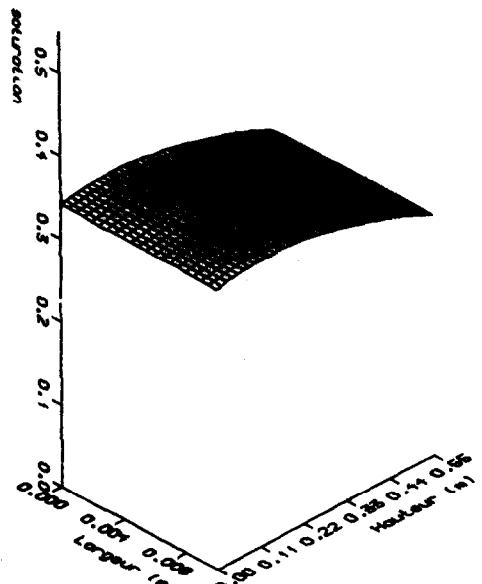


FIG. 8. Profil de saturation à t = 300 mn.

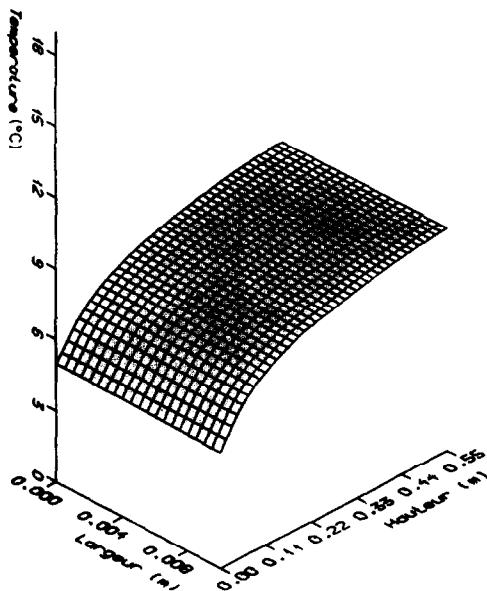


FIG. 9. Profil de la température pour  $t$  compris entre 150 et 560 mn.

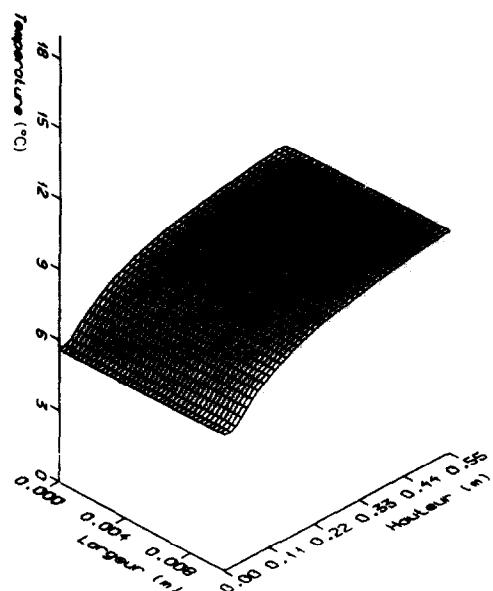


FIG. 11. Profil de température à  $t = 570$  mn.

de la gravité qui tend à vider de liquide le haut de la plaque.

A partir d'un certain moment et dans la partie inférieure de l'interface milieu poreux-milieu fluide, la teneur en liquide devient assez faible pour que la phase liquide soit discontinue et ne sécoulant pas (étape pendulaire). Le transfert d'humidité en phase liquide vers cette partie de l'interface s'arrête, alors, et la teneur en liquide chute considérablement (Fig. 10). Dans cette région les forces de retention de l'eau deviennent importantes et font que la pression d'équilibre

de la vapeur est inférieure à la pression de vapeur saturante. On dit, alors, que cette région est entrée dans le domaine hydroscopique. La décroissance de la pression partielle de la vapeur avec la teneur en liquide donne naissance à une diffusion de la vapeur vers l'interface et, donc, à une évaporation à l'intérieur du milieu poreux. On note alors l'apparition d'un front d'évaporation (zone à fort gradient de teneur en liquide) qui se propage aussi bien vers l'intérieur que vers le haut du milieu poreux. La vitesse de séchage ainsi que le rapport  $N$  des poussées d'Archimède chute

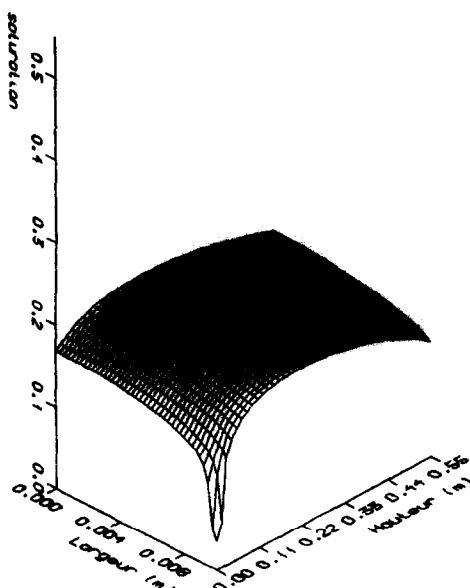


FIG. 10. Profil de saturation à  $t = 570$  mn.

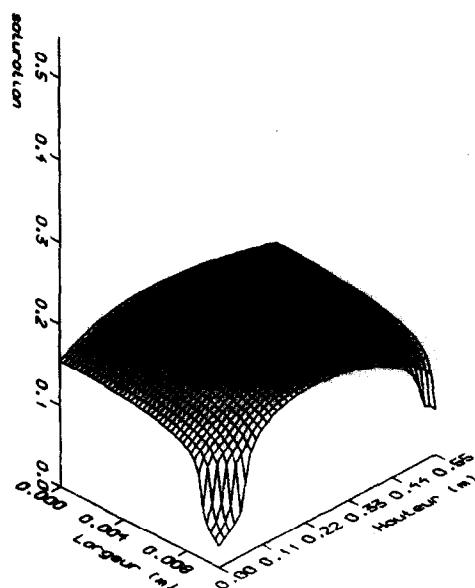
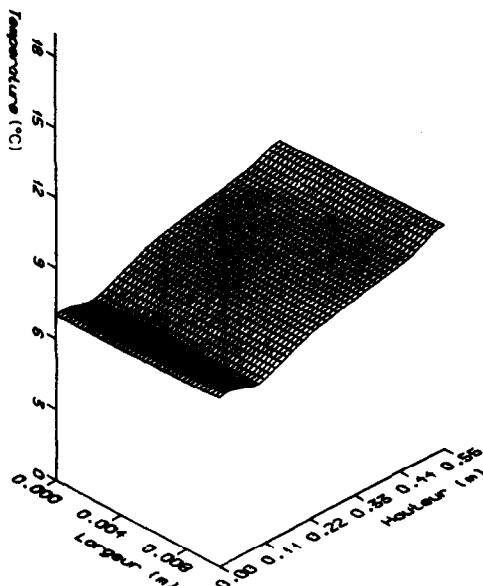
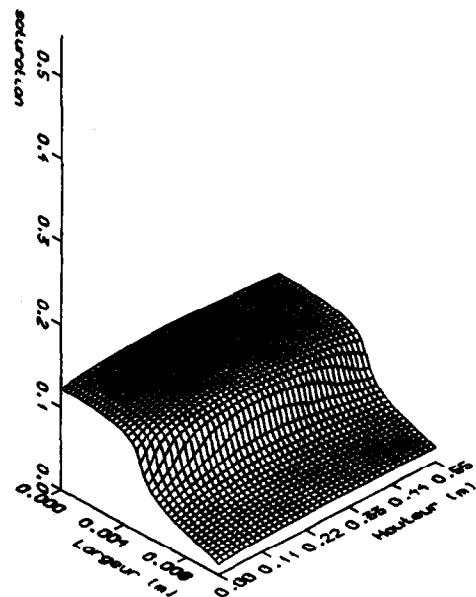


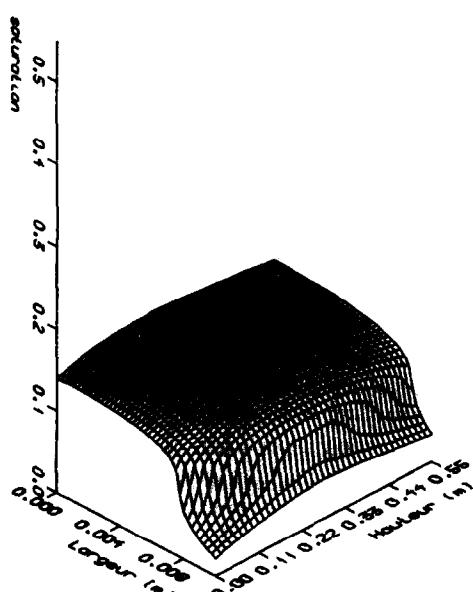
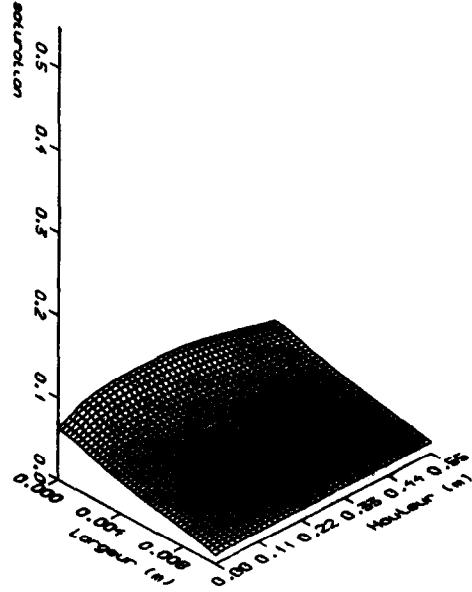
FIG. 12. Profil de saturation à  $t = 625$  mn.

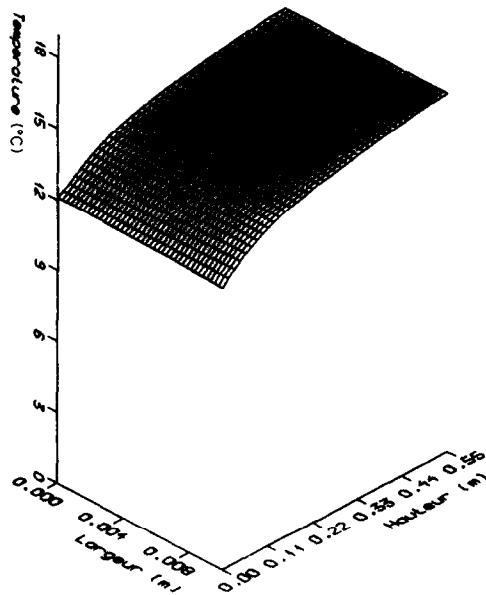
FIG. 13. Profil de température à  $t = 625$  mn.FIG. 15. Profil de saturation à  $t = 690$  mn.

dans la partie inférieure de la plaque (Figs. 4 et 5). On remarque, dans cette région, une élévation de la température (Figs. 9 et 11).

Le même phénomène se produit, ensuite, en haut de la plaque (Fig. 12), par suite des effets de gravité. On note, alors, une élévation de la température (Fig. 13), une décroissance de la vitesse de séchage ainsi que du rapport  $N$  des poussées d'Archimède (Figs. 4 et 5) et l'apparition d'un front d'évaporation qui se propage simultanément vers l'intérieur et vers le bas du milieu poreux.

A partir d'un certain moment, la teneur en liquide devient très faible sur toute l'interface milieu poreux–milieu fluide (Fig. 14). Au fur et à mesure que le front d'évaporation s'éloigne de l'interface, les gradients de teneur en liquide deviennent de plus en plus faibles (Figs. 15 et 16) la température dans le milieu poreux croît (Fig. 17) et la vitesse de séchage ainsi que le rapport  $N$  des poussées d'Archimède décroissent (Figs. 4 et 5). On tend, à la fin du séchage, à un écoulement permanent de convection naturelle thermique ( $N = 0$ ) sur une plaque verticale chauffée à

FIG. 14. Profil de saturation à  $t = 660$  mn.FIG. 16. Profil de saturation à  $t = 1833$  mn.

FIG. 17. Profil de température à  $t = 2333$  mn.

flux constant et en équilibre hygroscopique avec l'environnement.

## 5. CONCLUSION

Un modèle décrivant le séchage par convection naturelle d'une plaque poreuse verticale chauffée par un flux constant est proposé. Les effets bidimensionnels sur les transferts de chaleur et de masse dans le milieu poreux sont considérés. La résolution numérique de ce modèle a permis de représenter l'évolution, spatio-temporelle de la température, de la saturation en liquide et de la vitesse de séchage, et ainsi de décrire ce type de séchage.

## BIBLIOGRAPHIE

- S. Whitaker, Simultaneous heat mass and momentum transfer in porous media: a theory of drying. In *Advances in Heat Transfer*, Vol. 13, pp. 119–203. Academic Press, New York (1977).
- S. Whitaker, Toward a diffusion theory of drying, *Int. Engng Chem. Fund.* **16**, 408–414 (1977).
- S. Whitaker, Heat and mass transfer in granular porous media. In *Advances in Drying*, Vol. 1, pp. 23–61. Hemisphere, New York (1980).
- C. M. Marle, On macroscopic equations governing multiphase flow with diffusion and chemical reaction in porous media, *Int. Engng Sci.* **20**, 643–662 (1982).
- S. Bories, G. Bacon and M. Recan, Experimental and numerical study of coupled heat and mass transfer in porous materials, *Proc. 4th Int. Drying Symp.*, Kyoto, pp. 159–164 (1984).
- C. Moyne and A. Degiovanni, Importance of gas phase momentum equation in drying above the boiling of water, *Proc. 4th Int. Drying Symp.*, Kyoto, pp. 119–126 (1984).

- C. Basilico et M. Martin, Approche expérimentale des mécanismes de transfert au cours du séchage convectif à haute température d'un bois résineux, *Int. J. Heat Mass Transfer* **27**, 657–668 (1984).
- T. Z. Harmathy, Simultaneous moisture and heat transfer in porous system with particular reference to drying, *Int. Engng Chem. Fund.* **8**, 92–103 (1969).
- S. Ben Nasrallah et G. Arnaud, Séchage d'un milieu poreux contenant une faible teneur en eau, *Int. J. Heat Mass Transfer* **29**, 1443–1449 (1986).
- P. Perré, S. Ben Nasrallah et G. Arnaud, A theoretical study of drying: numerical simulation applied to clay-brick and softwood, *Proc. 5th Int. Drying Symp.*, Cambridge, Massachusetts, pp. 382–390 (1986).
- M. Prat, Heat and mass transfer predetermination between a drying material and external flow, *Proc. 5th Int. Drying Symp.*, Cambridge, Massachusetts, pp. 105–111 (1986).
- S. Ben Nasrallah, G. Arnaud et A. Trad, Evaporation en convection naturelle sur une plaque verticale chauffée à flux variable, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* **36**, 105–119 (1985).
- S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer Fluid Flow*. Hemisphere/McGraw-Hill, New York (1980).
- A. E. Scheidegger, *The Physics of Flow through Porous Media* (3rd Edn). University of Toronto Press (1974).
- L. D. Baver, W. H. Gardner and W. R. Gardner, *Soil Physics* (4th Edn). Wiley, New York (1972).
- W. D. Kingery, H. K. Bower and D. R. Uhlmann, *Introduction to Ceramics* (2nd Edn). Wiley-Interscience, New York (1976).

## ANNEXE : CARACTÉRISTIQUES PHYSIQUES DU MILIEU POREUX CONSIDÉRÉ

Les milieux poreux considéré (brique) est de porosité  $\varepsilon = 0,26$  et de perméabilité intrinsèque  $K = 2,5 \times 10^{-14} \text{ m}^2$ . L'émissivité de l'interface milieu poreux–milieu fluide est prise égale à 0,9.

Pour la phase solide, les valeurs de la masse volumique  $\rho_s$  de la capacité calorifique  $C_{ps}$  et de la conductivité thermique  $\lambda_s$  sont :

$$\rho_s = 26\,000 \text{ kg m}^{-3}; \quad C_{ps} = 879 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}; \\ \lambda_s = 1,442 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

La pression capillaire  $P_c$  est déduite à partir de l'approche empirique de Leverett [14] :

$$P_c = \varepsilon \sigma J(S)/K$$

$\sigma$  est la tension superficielle et  $J(S)$  est la fonction de Leverett qui peut être approchée par :

$$J(S) = 0,364(1 - \exp(-40(1-S))) + 0,221(1-S) \\ + 0,005/(S-0,09).$$

La perméabilité relative à la phase liquide est prise de la forme :

$$K_l = (S-0,09)^3/(1-0,09) \quad \text{si } S > 0,09 \\ K_l = 0 \quad \text{si } S < 0,09.$$

La diffusivité effective de la vapeur dans le milieu poreux est donnée par l'expression suivante [15] :

$$D_{\text{eff}} = D(1-S)^2(\varepsilon - \varepsilon_l)^{4/3}.$$

La conductivité thermique effective du milieu poreux est donnée par la loi empirique proposée par Kingery *et al.* [16] :

$$\lambda_{\text{eff}} = (\lambda_g^\alpha(\varepsilon - \varepsilon_l) + \lambda_l^\alpha \varepsilon_l + \lambda_s^\alpha(1-\varepsilon))^{1/\alpha}; \\ \alpha = 0,25.$$

La pression partielle de la vapeur est égale à la pression

d'équilibre de celle-ci :

$$\bar{P}_v = P_{vs} \exp\left(\frac{-2\sigma M_v}{r\rho_1 RT}\right)$$

$P_{vs}$  est la pression de vapeur saturante et  $r$  est une grandeur caractéristique qui représente le rayon de courbure moyen

des ménisques si les forces de rétention sont d'origine capillaire,  $r$  est déduite de la courbe de sorption de la référence [8] et peut être donnée par :

$$\log(r) = -9,9784 + 43,8S - 253,5S^2 + 794,54S^3 - 1333,7S^4 + 1111S^5 - 352,5S^6.$$

## STUDY OF TWO-DIMENSIONAL HEAT AND MASS TRANSFER DURING THE DRYING BY NATURAL CONVECTION OF A VERTICAL POROUS PLATE HEATED WITH A CONSTANT FLUX

**Abstract**—A theoretical study of two-dimensional heat and mass transfer which occurs during drying by free convection of a porous vertical flat slab heated with uniform flux is reported. A model for this drying phenomenon is presented and resolved by the finite-difference technique. Numerical simulation results are presented and analysed.

## UNTERSUCHUNG DES ZWEIDIMENSIONALEN WÄRME- UND STOFFTRANSPORTES WÄHREND DES TROCKNENS DURCH NATÜRLICHE KONVEKTION AN EINER DURCH EINEN KONSTANTEN WÄRMESTROM BEHEIZTEN VERTIKALEN, PORÖSEN PLATTE

**Zusammenfassung**—Es wird eine theoretische Untersuchung des 2-dimensionalen Wärme- und Stofftransports, der während des Trocknens durch natürliche Konvektion an einer gleichförmig beheizten porösen, vertikalen flachen Platte auftritt, vorgestellt. Für diese Trocknungsart wird ein Modell entwickelt und durch Anwenden des Finite-Differenzen-Verfahrens rechnerisch gelöst. Ergebnisse der numerischen Simulation werden ebenfalls vorgestellt und analysiert.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА ПРИ ЕСТЕСТВЕННОКОНВЕКТИВНОЙ СУШКЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОРИСТОЙ ПЛАСТИНЫ С ПОСТОЯННЫМ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ

**Annotation**—Теоретически исследуется двумерный тепло- и массоперенос в процессе свободноконвективной сушки равномерно нагреваемой пористой вертикальной плоской пластины. Предложена и решена конечно-разностным методом математическая модель процесса сушки. Приводятся и анализируются результаты численного моделирования.